-2-

Induktionsbeweis

Die vollständige Induktion bezeichnet ein Beweisverfahren, bei dem A(n) zu beweisen gilt für n≥1.

Um A(n) für alle n≥n0 zu beweisen, genügt es, zu beweisen, dass A(n) richtig ist (Induktionsanfang).

Falls A(n) richtig ist, so ist auch A(n+1) richtig (Induktionsschritt).

Durch wiederholte Anwendung erhält man die Gültigkeit für A(n0+2),A(n0+3) usw.

Im Folgenden bezeichne n die Anzahl der Elemente einer Menge.

Es gelte k ≤ n k IN

Untersucht werden sollen Kombinationen von k Elementen. Das bezeichnet Zusammenstellungen von k Elementen, die man in irgendeiner Anordnung nebeneinander stellt.

Dies wird geschrieben als .

n! sowie k! bezeichnen das Produkt der natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich der Zahl n bzw. k ist.

Man unterscheidet hierbei 4 verschiedene Typen von Kombinationen, je nachdem, ob die Reihenfolge berücksichtigt wird oder nicht und ob sich die Elemente wiederholen können oder nicht:

-3-

Auswahl von k Elementen aus einer Menge mit n Elementen K(n;k)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ohne Wiederholung | | Mit Wiederholung | |
| Mit  Berücksichtigung | Ohne Berücksichtigung | Mit  Berücksichtigung | Ohne Berücksichtigung |
| Beispiel für k=2, n=4  (1;2),(1;3),(1;4)  (2;1), (2;3),(2;4)  (3;1),(3;2), (3;4)  (4;1),(4;2),(4;3) | Beispiel für k=2, n=4  (1;2),(1;3),(1;4)  (2;3),(2;4)  (3;4) | Beispiel für k=2, n=4  (1;1),(1;2),(1;3),(1;4)  (2;1),(2;2),(2;3),(2;4)  (3;1),(3;2),(3;3),(3;4)  (4;1),(4;2),(4;3),(4;4) | Beispiel für k=2, n=4  (1;1),(1;2),(1;3),(1;4)  (2;2),(2;3),(2;4)  (3;3),(3;4)  (4;4) |
| K(n;k)= =k! | K(n;k)= = | K(n;k)= nk | K(n;k)= = |

**1. Kombinationen ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Reihenfolge**

Satz: Die Anzahl der Kombinationen zu je k von n verschiedenen Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung wird durch das Produkt

n(n-1)(n-2)…(n-k+1) dargestellt.

Beweis: (Durch vollständige Induktion nach k)

Es gibt n verschiedene Kombinationen von einelemtigen Mengen (k=1) aus einer n elementigen Menge.

-4-

Betrachtet man zweielementige Mengen, so ergibt sich:

(1;2),(1;3)…(1;n)

(2;1), (2;3)…(2;n)

(3;1),(3;2), …(3;n)

…

(n;1),(n;2),(n;3)…(n;n+1).

Die Anzahl ist n(n-1), denn jede der n Zeilen enthält n-1 Elemente, da die Diagonale der Matrix fehlt.

Denkt man sich dieses System fortgesetzt für eine feste Anzahl von n Elementen und einer beliebigen Anzahl von k Kombinationen, so enthält jede weitere Zeile n-k Elemente.

Hieraus folgt, dass es

n(n-1)(n-2)…(n-k+1)(n-k) Kombinationen (k+1)-ter Ordnung gibt.

Man erhält alle (k+1)-ter Ordnung, indem man alle Elemente k-ter Ordnung der Reihe nach in eine Spalte schreibt und an jede Kombination alle n Elemente anfügt.

1. **Kombinationen ohne Wiederholung ohne Berücksichtigung der Anordnung**

Es entfallen alle die Kombinationen, die die gleichen Elemente in einer anderen Anordnung enthalten.

Es gibt k! verschiedene Arten k Elemente anzuordnen.

Satz: Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung wird durch den Ausdruck



-5-

Allgemein:  =

Da die Anzahl von Kombinationen der Länge k ohne Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge beschreibt, folgt hieraus auch, dass eine natürliche Zahl ist, was man aufgrund der Quotientenschreibweise nicht erkennen kann.

Bezogen auf eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen ist nur der Fall n IN, k IN und k ≤ n wichtig.

Es gilt:

:=

Behauptung: =

Beweis: =  = =  =

Ist k=1, so gibt es nur 1. Menge die n Elemente enthält, nämlich {1,2,3…n}.

Ist k=1 richtig, so ergibt sich dadurch auch die Richtigkeit für k+1. Bei Kombinationen k-ter Ordnung sind (n-k) Elemente noch nicht vorhanden.

Fügt man diese Elemente an, so ergeben sich (n-k) Kombinationen der (k+1)-ten Ordnung.

-6-

1. **Kombinationen mit Wiederholung mit Berücksichtigung der Anordnung**

Satz: Die Auswahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge ist gleich

nk.

Beweis: (Induktion von k auf k+1)

Die Behauptung ist richtig für k=1, denn es gibt n1=n verschiedene einelementige Mengen.

Die Anzahl der Kombinationen (k+1)-ter Ordnung besteht somit aus einem System von nk Zeilen und n Spalten.

Es gibt somit nkn=nk+1 Elemente.

Beispiel:

Es gibt 53 dreistellige Zahlen, die nur aus ungeraden Zahlen bestehen.

1. **Kombinationen mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**

Satz: Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung ist

A(n,k)=

A(n,k) bezeichnet die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

-7-

Beweis:

1. A(n,1)=n ist offensichtlich, denn es gibt n Möglichkeiten ein Element aus einer n-elementigen Menge zu entnehmen.
2. A(n,2) lässt sich veranschaulichen durch:

(1;1),(1;2),(1;3),…(1;n) 🡪 n Elemente

(2;2),(2;3),…(2;n) 🡪 n-1 Elemente

(3;3)…(3;n) 🡪 n-2 Elemente

……

(n;n). 🡪 1 Element

Die Anzahl A(n,2)=n+(n-1)+(n-2)+…+1 also

A(n,2)=

Beispiel:

Denn die Anzahl entspricht einer Ziehung ohne Wiederholung, wenn man sich vorstellt, dass man die bereits gezogene Kugel wieder zurückgelegt, d.h. es werden aus (n+1) möglichen Elementen 2 Elemente ausgewählt.

Genauso erkennt man, dass eine Ziehung von A(n,k+1)=A(n,k)+A((n-1),k)+A(n-2,k)+…A(1,k)

n=Anzahl verschiedener Objekte

k= Anzahl entnommener Objekte

Wenn man aus n Kugeln k zieht mit Wiederholung, so kann man dieses durch jeweiliges zurücklegen

(k-1 mal) von Ziehen ohne Wiederholung ersetzen.